
Studien zur Hochschuldidaktik und zum Lehren und Lernen mit digitalen Medien in der Mathematik und in der Statistik

Reihe herausgegeben von
Rolf Biehler, Paderborn, Deutschland

Fachbezogene Hochschuldidaktik und das Lehren und Lernen mit digitalen Medien in der Schule, Hochschule und in der Mathematiklehrerbildung sind in ihrer Bedeutung wachsende Felder mathematikdidaktischer Forschung. Mathematik und Statistik spielen in zahlreichen Studienfächern eine wesentliche Rolle. Hier stellen sich zahlreiche didaktische Herausforderungen und Forschungsfragen, ebenso wie im Mathematikstudium im engeren Sinne und Mathematikstudium aller Lehrämter. Digitale Medien wie Lern- und Kommunikationsplattformen, multimediale Lehrmaterialien und Werkzeugsoftware (Computeralgebrasysteme, Tabellenkalkulation, dynamische Geometriesoftware, Statistikprogramme) ermöglichen neue Lehr- und Lernformen in der Schule und in der Hochschule. Die Reihe ist offen für Forschungsarbeiten, insbesondere Dissertationen und Habilitationen, aus diesen Gebieten.

Reihe herausgegeben von

Prof. Dr. Rolf Biehler
Institut für Mathematik
Universität Paderborn
Deutschland

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/11974>

Frank Feudel

Die Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Analysen zum benötigten, gelehrten
und von Studierenden erreichten
Verständnis des Ableitungsbegriffs

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Rolf Biehler

 Springer Spektrum

Frank Feudel
Institut für Mathematik,
Abteilung Mathematik und ihre Didaktik
Humboldt-Universität zu Berlin
Berlin, Deutschland

Dissertation der Universität Paderborn, 2018
u. d. T. Frank Feudel: Theoretische und empirische Analysen zum benötigten,
gelehrten und bei Studierenden der Wirtschaftswissenschaften erreichten Verständnis
des Ableitungsbegriffs

Tag der Disputation: 19.12.2018
Erstgutachter: Prof. Dr. Rolf Biehler
Zweitgutachter: Prof. Dr. Hans M. Dietz

ISSN 2194-3974 ISSN 2194-3982 (electronic)
Studien zur Hochschuldidaktik und zum Lehren und Lernen mit digitalen Medien in der
Mathematik und in der Statistik
ISBN 978-3-658-26477-2 ISBN 978-3-658-26478-9 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-26478-9>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen National-
bibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Die Dissertation von Frank Feudel widmet sich einem Thema, das bisher wenig erforscht ist: dem Lehren und Lernen von Mathematik im Service für die Wirtschaftswissenschaften. Für Studierende der Wirtschaftswissenschaften ist ein Verständnis der in der Ökonomie verwendeten mathematischen Grundlagen essentiell. Daher sollten sie in ihrer Mathematikausbildung ein adäquates Verständnis wesentlicher grundlegender Konzepte der Mathematik, die in der Ökonomie eine wichtige Rolle spielen, erwerben, damit sie diese dort später verständlich verwenden können.

Frank Feudel legt in seiner Arbeit hierbei den Fokus auf das Ableitungskonzept. Dieses wird zur Lösung verschiedener wichtiger Problemstellungen in der Ökonomie verwendet, zum Beispiel bei der Lösung von Optimierungsproblemen, bei der Untersuchung des Änderungsverhaltens von Funktionen zum Treffen optimaler Entscheidungen oder bei der Beschreibung bzw. Charakterisierung ökonomischer Funktionen in ökonomischen Theorien wie der Kostentheorie. Jedoch ist die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in der Ökonomie sehr heterogen, teilweise inkonsistent oder gar widersprüchlich. Daher ist der Aufbau eines Verständnisses der Ableitung, welches einerseits mathematisch adäquat ist, andererseits aber die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in der Ökonomie mitberücksichtigt, nicht trivial. Frank Feudel hat in seiner Arbeit genauer untersucht, i.) wie man ein solches adäquates Verständnis der Ableitung theoretisch beschreiben kann, ii.) inwiefern ein solches derzeit in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vermittelt wird, und iii.) inwiefern Studierende der Wirtschaftswissenschaften über ein solches vor und nach Besuch einer mathematischen Lehrveranstaltung an der Universität verfügen.

Die Arbeit ist für alle interessant, die sich mit dem Lehren und Lernen von Mathematik im Servicebereich beschäftigen. Dies umfasst insbesondere Lehrende in mathematischen Lehrveranstaltungen für die Wirtschaftswissenschaften, weil auf Basis der Ergebnisse dieser Arbeit zum Verständnis des Ableitungsbegriffs in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler zahlreiche mögliche Konsequenzen für die Lehre abgeleitet werden. Da diese aber nicht alle ökonomiespezifisch sind, sind sie außerdem zu großen Teilen vermutlich auch auf andere mathematische Serviceveranstaltungen, in de-

nen das Konzept der Ableitung vermittelt wird, übertragbar. Zum anderen ist die Arbeit für Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktiker interessant. Sie liefert viele Ergebnisse zu möglichen Schwierigkeiten der Studierenden beim Lehren und Lernen des Ableitungskonzepts bei der zahlenmäßig großen Studierendengruppe der Ökonomiestudierenden, die bisher kaum untersucht wurde. Auch hier lassen sich Ergebnisse teilweise vermutlich auf andere Serviceveranstaltungen übertragen.

Nach der Einleitung erfolgt in Kapitel 2 eine gründliche Herausarbeitung der Problematik des heterogenen und teilweise widersprüchlichen Umgangs mit der Ableitung bei deren Interpretation in ökonomischen Kontexten am Beispiel der Grenzkosten, der Ableitung einer Kostenfunktion. Basis hierfür bildet eine Analyse verschiedener ökonomischer Lehrbücher in Bezug auf die Einführung und Verwendungsweise der Grenzkosten. Aus dieser Analyse werden verschiedene Auffassungen der Grenzkosten deutlich (in der Regel als Ableitung oder als Zusatzkosten der nächsten Einheit), die oft simultan und ohne jede Verknüpfung, verwendet werden. Dies führt dann zu Inkonsistenzen bei der Darstellung der Ausführungen innerhalb eines Lehrbuchs sowie zwischen verschiedenen Lehrbüchern, und zu Widersprüchen zum Vorwissen der Studierenden zur Ableitung aus der Schule. Dies kann zu erheblichen Verwirrungen führen, was die Wichtigkeit der Vermittlung eines adäquaten Verständnisses der Ableitung in mathematischen Lehrveranstaltungen, das aber auch die Praxis des Umgangs mit der Ableitung in ökonomischen Kontexten berücksichtigt, unterstreicht.

In Kapitel 3 entwickelt Frank Feudel dann ein theoretisches Rahmenmodell für das, was man ausdifferenziert unter einem adäquaten Verständnis des Ableitungsbegriffs unter Berücksichtigung der wirtschaftswissenschaftlichen Verwendungspraxis der Ableitung verstehen kann. Dieses Rahmenmodell wird auf Grundlage fachdidaktischer Literatur unter Berücksichtigung der wirtschaftswissenschaftlichen Verwendungspraxis der Ableitung entwickelt. Die theoretische Basis des Modells bildet das Konstrukt des *concept image* von Tall und Vinner (1981) zur Beschreibung von Verständnis mathematischer Konzepte. Das Rahmenmodell bildet dann eine Klammer für die weiteren Kapitel der Arbeit.

In Kapitel 4 erfolgt eine Aufarbeitung des Forschungsstandes zu bereits bekannten Schwierigkeiten beim Verständnis des Ableitungsbegriffs auf Basis internationaler Forschungsliteratur. Dabei beschränkt sich diese Aufarbeitung nicht auf Studien mit Ökonomiestudierenden, weil man davon ausgehen kann, dass Schwierigkeiten von Mathematik- und Ingenieursstudierenden auch bzw. erst recht bei Studierenden der Wirtschaftswissenschaften auftreten.

Kapitel 5-8 beinhalten dann die empirischen Studien zur Ermittlung des praktisch gelehrten und bei Studierenden der Wirtschaftswissenschaften erreichten Verständnisses der Ableitung. In Kapitel 5 wird zunächst das in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler praktisch gelehrt und das in der Ökonomie praktisch vorausgesetzte Verständnis der Ableitung ermittelt. Hierfür werden Lehrbücher der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler sowie Lehrbücher der Wirtschaftswissenschaften auf Basis des entwickelten Rahmenmodells zum Verständnis der Ableitung analysiert.

In Kapitel 6 nimmt Frank Feudel das Verständnis der Ableitung bei den Studierenden unter die Lupe, und zwar zunächst bei Studienanfängerinnen und Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften. Hierfür konzipiert er auf Basis des in Kapitel 3 entwickelten Rahmenmodells zum Verständnis der Ableitung einen umfangreichen Vortest. Durch den Test wird eine große Fülle bemerkenswerter Detailergebnisse zu Tage gefördert, die für die Gestaltung der Lehre im ersten Semester (und eigentlich auch rückblickend für den Schulunterricht) eine hohe Relevanz aufweisen.

In den Kapiteln 7 und 8 untersucht Frank Feudel schließlich exemplarisch das von Studierenden der Universität Paderborn erreichte Verständnis der Ableitung nach Besuch der Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I“. Zunächst wird in Kapitel 7 eine Analyse von Bearbeitungen von vier passenden Klausuraufgaben durch über 800 Studierende am Ende des ersten Semesters mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse vorgenommen. Diese Analyse wird dann in Kapitel 8 um eine Interviewstudie ergänzt, die interpretativ ausgewertet wird.

Die Ergebnisse der einzelnen Studien werden schließlich in Kapitel 9 zusammengefasst, und Schlussfolgerungen für die Lehre gezogen, um ein besseres Verständnis der Ableitung und ihrer ökonomischen Interpretation zu erreichen.

Insgesamt legt Frank Feudel eine umfangreiche, theoretisch fundierte und methodisch gut durchdachte Arbeit vor. Die Ergebnisse bilden eine wesentliche Grundlage für die mathematikdidaktische Forschung zum Lehren und Lernen des Ableitungsbegriffs und mathematischer Konzepte im Allgemeinen im Service für die Wirtschaftswissenschaften. Sie haben aber auch eine hohe praktische Relevanz, da aus den Ergebnissen der Forschung zahlreiche mögliche Konsequenzen für die Gestaltung der Lehre in der Mathematik im Servicebereich abgeleitet werden.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich zunächst bei all jenen Personen herzlich bedanken, ohne die das Abfassen dieser Dissertation nicht möglich gewesen wäre.

Zunächst möchte ich mich hierbei natürlich ganz herzlich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Rolf Biehler für sein großes Engagement und die stets kompetente Beratung bedanken. Insbesondere bedanke ich mich für die vielen intensiven Diskussionen, ohne die die Arbeit in der vorliegenden Form nicht hätte entstehen können. Außerdem ermöglichte er mir die Teilnahme an sehr vielen Tagungen und Konferenzen, insbesondere im Rahmen der Aktivitäten des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (khdm), was für mein wissenschaftliches Vorankommen ebenfalls essentiell war.

Mein zweiter Dank gilt Prof. Dr. Hans M. Dietz für die jahrelange Zusammenarbeit in seiner Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ an der Universität Paderborn, in der er mir die Durchführung meiner Studien ermöglichte, insbesondere auch durch eine passende inhaltliche Gestaltung seiner Lehrveranstaltung. Außerdem hat er sich dankeswerter Weise für das zweite Gutachten dieser Dissertation bereit erklärt.

Außerdem möchte ich mich noch bei Prof. Dr. Andreas Filler bedanken, der mir im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter bei ihm ab Beginn meiner Anstellung Ende 2017 sehr viel Freiraum ließ, damit ich diese Dissertation abschließen konnte.

Für das erfolgreiche Verfassen einer Dissertation ist aber auch ein gutes kollegiales Umfeld wichtig. Hierfür möchte ich mich bei „meinen Mitstreitern“ aus der Arbeitsgruppe Biehler im Zeitraum 2013-2017 und meinen Kollegen aus der Arbeitsgruppe Dietz danken. Aus der gemeinsamen Arbeit sind zum Teil auch echte Freundschaften entstanden, was ich besonders toll finde. Ganz besonders möchte ich mich hierbei bei Anja Panse bedanken. Ohne Dich und Deinen ständigen Zuspruch hätte ich diese Dissertation nie geschafft! Wenn ich nicht mehr weiter wusste, hattest du stets ein offenes Ohr und einen guten fachlichen oder menschlichen Rat.

Ebenso möchte mich hier noch bei meinen Kollegen Leander Kempen und Alexandra Schock bedanken, die mir an entscheidenden Stellen durch ihre fachliche bzw. menschliche Unterstützung sehr geholfen haben. Weiterhin

gilt mein Dank meiner studentischen Hilfskraft Tobias Klaholz, der mich maßgeblich bei einigen Auswertungen unterstützt hat. Außerdem möchte ich hier unbedingt noch Bernd Büchler und Axel Hoppenbrock nennen, die dafür gesorgt haben, dass Paderborn auch abseits der Arbeitszeit in den (späten) Abendstunden für mich lebenswert wurde.

Zu guter Letzt möchte ich mich noch bei meinen Eltern und Großeltern sowie bei Theo für die Geduld und Unterstützung auf privater Ebene danken.

Vielen lieben Dank an euch alle!

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Kurze Eingangsmotivation und Ziele der Arbeit	1
1.2	Forschungsfragen und Überblick über die zugehörigen Studien	3
1.3	Übersicht über die Kapitel	6
2	Ableitung und Grenzkosten in der Ökonomie	9
2.1	Die Bedeutung der Ableitung in den Wirtschaftswissenschaften	9
2.2	Schwierigkeiten bei der Verwendung der Ableitung in der Ökonomie	12
3	Modell für ein mögliches adäquates Verständnis der Ableitung	27
3.1	Die Konstrukte „concept image“ und „concept definition“ . .	28
3.2	Beschreibung eines möglichen „concept image“ der Ableitung	36
3.2.1	Theoretisches Rahmenmodell zum Verständnis des Ableitungsbegriffs nach Zandieh	37
3.2.2	Ein Rahmenmodell auf Basis der APOS-Theorie . . .	45
3.2.3	Das „Differentiation Competency Framework“	51
3.2.4	Ein auf Aspekten und Grundvorstellungen basierendes Rahmenmodell zum Verständnis der Ableitung	54
3.2.5	Begründete Auswahl eines der Modelle als Basis für die empirischen Studien der Dissertation	58
3.3	Erweiterung um die ökonomische Interpretation der Ableitung	60
3.3.1	Die ökonomische Interpretation der Ableitung	61
3.3.2	Verbindung zwischen der Ableitung als mathematisches Konzept und ihrer ökonomischen Interpretation	62
3.3.3	Möglichkeiten der Erklärung der Legitimität der öko- nomischen Interpretation der Ableitung	66
3.3.4	Erweiterung des Modells von Zandieh	69
4	Bekannte Schwierigkeiten beim Verständnis des Ableitungsbe- griffs	73
4.1	Schwierigkeiten bei der Steigung linearer Funktionen und beim DQ	74

4.2	Probleme beim Verständnis der Ableitung an einer Stelle . . .	93
4.3	Schwierigkeiten beim Verständnis der Ableitung als Funktion	130
4.4	Probleme mit Änderungsraten in ökonomischen Kontexten . . .	157
4.5	Zusammenfassung Probleme mit der Ableitung und Konsequenzen	162
5	Lehrbuchanalysen zum Ableitungskonzept	173
5.1	Ziel und Methodik der Lehrbuchanalysen	173
5.2	Analyse des Lehrbuchs von Dietz	176
5.2.1	Übersicht über die Kapitel zur Differentialrechnung in diesem Lehrbuch	176
5.2.2	Kapitel über den Ableitungsbegriff	178
5.2.3	Kapitel über die Technik der Ableitung	187
5.2.4	Kapitel über Elastizitäten	191
5.2.5	Kapitel zur Fahrstrahlanalyse von Kostenfunktionen .	198
5.2.6	Zusammenfassung der Ergebnisse aus der Analyse des Lehrbuchs von Dietz	202
5.3	Analyse des Lehrbuchs von Sydsæter und Hammond	207
5.3.1	Übersicht über die Kapitel zur Differentialrechnung in diesem Lehrbuch	207
5.3.2	Kapitel „Steigungen von Kurven“	211
5.3.3	Kapitel „Ableitung, Tangenten“	213
5.3.4	Kapitel über Änderungsraten	219
5.3.5	Kapitel über „Einfache Regeln der Differentiation“ . . .	222
5.3.6	Kapitel über die Summen-, Produkt,- und Quotientenregel	225
5.3.7	Kapitel über lineare Approximation	228
5.3.8	Kapitel über Elastizitäten	231
5.3.9	Zusammenfassung der Ergebnisse aus der Analyse des Buches von Sydsæter und Hammond	235
5.4	Analyse des Lehrbuchs von Tietze	241
5.4.1	Übersicht über die Kapitel zur Differentialrechnung in diesem Lehrbuch	241
5.4.2	Kapitel „Grundlagen der Differentialrechnung“	241
5.4.3	Kapitel zur Technik des Differenzierens	250
5.4.4	Kapitel über die ökonomische Interpretation der Ableitung	253
5.4.5	Zusammenfassung der Ergebnisse aus der Analyse des Buches von Tietze	259

5.5	Analyse des Lehrbuchs von Wöhe	265
5.5.1	Leitfragen und Gliederung der Analyse	265
5.5.2	Die Ableitung in der Kosten- und Produktionstheorie	266
5.5.3	Die Rolle der Ableitung bei der Lagerplanung	286
5.5.4	Verwendung der Ableitung bei der Bewertung der Auswirkungen von Preisänderungen auf Nachfrage und Erlös	290
5.5.5	Verwendung der Ableitung in der Preistheorie	296
5.5.6	Zusammenfassung der Ergebnisse der Analyse des Lehrbuchs von Wöhe	302
5.6	Zusammenfassung der Lehrbuchanalysen und Konsequenzen .	306
6	Konstruktion und Auswertung eines Vortests zur Ableitung	313
6.1	Ziel und Begründung des methodischen Vorgehens	313
6.2	Überblick über den Aufbau und die Konstruktion des Tests .	315
6.3	Erhebung der Daten und Auswertungsmethodik des Tests . .	316
6.3.1	Erhebung der Daten	316
6.3.2	Auswertungsmethodik des Tests	317
6.4	Teilttest zur Technik des Ableitens	318
6.5	Teilttest zu Aspekten der Steigung linearer Funktionen	323
6.6	Teilttest zum Differenzenquotienten	334
6.7	Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung	349
6.8	Teilttest zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate .	365
6.9	Teilttest zum Tangentenkonzept	387
6.10	Teilttest zur ökonomischen Interpretation der Ableitung	394
6.11	Globalauswertung des Vortests	419
6.12	Zusammenfassung Vortest und Konsequenzen für die Lehre .	438
7	Analyse von Klausuraufgaben zur ökonomischen Deutung der Ab- leitung	449
7.1	Ziel und Methodik der Analyse	449
7.2	Äußere Rahmenbedingungen der Studie	450
7.2.1	Beschreibung des Kurses „Mathematik für Wirtschafts- wissenschaftler“ an der Universität Paderborn	450
7.2.2	In der Lehrveranstaltung vermitteltes Wissen zur öko- nomischen Interpretation der Ableitung	451
7.3	Beschreibung der vier Klausuraufgaben	457
7.4	Aufgabe 1 zur ökonomischen Interpretation der Ableitung . .	459
7.5	Aufgabe 2 zur mathematischen Interpretation der Ableitung .	469

- 7.6 Aufgabe 3 zur näherungsweisen Bestimmung von zusätzlichen Kosten 474
- 7.7 Aufgabe 4 zum Zusammenhang zwischen Ableitung und Zusatzkosten 480
- 7.8 Zusammenfassung der Analyseergebnisse und Konsequenzen . 490

- 8 Interviewstudie zur ökonomischen Interpretation der Ableitung 497**
 - 8.1 Ziel der Interviewstudie 497
 - 8.2 Konzept und Aufbau des Interviews 498
 - 8.3 Erhebung und Analyse der Daten 512
 - 8.4 Auswertung der einzelnen Interviews zu den Grenzkosten . . 515
 - 8.4.1 Auswertung des Interviews von Johannes 515
 - 8.4.2 Auswertung des Interviews von Holger 529
 - 8.4.3 Auswertung des Interviews von Detlef 548
 - 8.4.4 Auswertung des Interviews von Ralf 564
 - 8.4.5 Auswertung des Interviews von Karl 579
 - 8.4.6 Auswertung des Interviews von Veronika 593
 - 8.4.7 Auswertung des Interviews von Susanne 607
 - 8.4.8 Auswertung des Interviews von Lisa 626
 - 8.5 Fallübergreifende Darstellung der Ergebnisse 641
 - 8.6 Zusammenfassung der Interviewstudie und Konsequenzen . . 654

- 9 Zusammenfassung, Fazit und Ausblick 659**
 - 9.1 Zusammenfassung der Ergebnisse der Dissertation 659
 - 9.2 Mögliche Konsequenzen der Ergebnisse für die Lehre 674
 - 9.3 Beitrag der Arbeit für die Forschung und Ausblick 680

- Literaturverzeichnis 687**

- Anhang 703**

Abbildungsverzeichnis

2.1	Graphische Veranschaulichung des Unterschiedes zwischen den Grenzkosten als Differenzkosten und den Grenzkosten als Differentialkosten in Schroer (1995, S.66)	20
2.2	Graphische Darstellung zur Erklärung des Grenznutzens aus Reiß (2007, S.196)	21
3.1	Veranschaulichung der Approximation von f durch die Tangente t mit $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$	64
3.2	Erweiterung des Zandiehischen Rahmenmodells zum Verständnis der Ableitung um die ökonomische Interpretation der Ableitung und deren Verbindung zum mathematischen Konzept über lineare Approximation	71
4.1	Graphik der Aufgabe zum Geschwindigkeitsvergleich bei gleichförmiger Bewegung aus McDermott u. a. (1987, S.504)	78
4.2	Graphiken zur Steigungs- und Winkelbestimmung aus Zaslavsky u. a. (2002, S.121)	86
4.3	Frage 1 aus Williams (1991, S.221) zur Ermittlung der <i>spontaneous models</i> der Studierenden zum Grenzwert	98
4.4	Testeinsetzungen der Funktion F mit $F(x) := x + 1 + \frac{1}{10^{20}x}$ (Williams, 1991, S.224)	101
4.5	Funktionen aus Viholainen (2005, S.1814), bei denen die Nicht-Differenzierbarkeit bei $x = 1$ begründet werden sollte	119
4.6	Von 38% der Studierenden gezeichnete falsche Tangente an den Punkt P in Vinner (1982, S.27) ($N = 278$)	125
4.7	Vorgegebene Kurven im Test von Biza, bei denen die Studierenden entscheiden sollten, ob die Geraden Tangenten im Punkt A sind (Biza, 2007, S.8)	127
4.8	Dreiecksaufgabe zum Graph-als-Bild Fehler aus Hoffkamp (2011, S.12)	131
4.9	Rennbahnaufgabe zum Graph-als-Bild Fehler aus Bell u. Janvier (1981, S.38-39)	132
4.10	Geschwindigkeits-Zeit Diagramm aus Beichner (1994, S.761)	134

4.11	Graphik des Items aus dem PCA zur Beschreibung des Wachstums einer Funktion von $x = 5$ bis $x = 12$ (Carlson u. a., 2010)	135
4.12	Ausgangsgraph und von Tim gezeichnete Ableitungsfunktion (Aspinwall u. a., 1997, S.309)	137
4.13	Aufgabe von Monk (1994, S.22) zum Verständnis von Änderungsraten an einer Stelle und über einen Zeitraum	140
4.14	Experiment zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Funktion und Ableitung im Kontext von Luftzufuhr (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.16)	144
4.15	Gegebener Ableitungsgraph und Dans vorausgesagte Volumen-Zeit Funktion zu Beginn des Experiments von Nemirovsky u. Rubin (1992, S.17) in Abbildung 4.14	145
4.16	Vom Interviewer revidierter Graph der Zuflussrate im Experiment von Nemirovsky u. Rubin (1992, S.20) mit bei 0 beginnender Zuflussrate	145
4.17	Gegebener Ableitungsgraph und Dans vorausgesagter Graph der zugehörigen Volumen-Zeit Funktion nach der Erkenntnis im Experiment, dass es ein Phänomen wie abnehmendes Wachstum gibt (Nemirovsky u. Rubin, 1992, S.28)	147
4.18	Gefäße und zur Auswahl stehende Graphen der Ableitungsfunktion $h'(t)$ aus Çetin (2009b, S.236)	150
4.19	Zur Auswahl stehende Graphen bei der Geschwindigkeitsaufgabe von Çetin (2009b, S.235)	151
4.20	Aufgabe aus Hahn u. Prediger (2008, S.176) zum Testen des Verständnisses der Ableitung als lokale Änderungsrate im Kontext gegensinniger Kovariation	152
4.21	Flaschenaufgabe zum kovariationalen Argumentieren aus Carlson u. a. (2002, S.360)	153
4.22	Sallys Lösung der Aufgabe, ob die Anschaffung des 196ten Flugzeuges lohnt (Mkhatshwa u. Doerr, 2015, S.2204)	161
5.1	Graphik zur Visualisierung des Grenzüberganges zur Ableitung in Dietz (2012, S.258)	179
5.2	Graphik zur Veranschaulichung der lokalen linearen Approximation in Dietz (2012, S.267)	184
5.3	Vierphasendiagramm der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K mit $K(x) = 3x^3 - 30x^2 + 106x + 216$ aus dem Lehrbuch von Dietz (2012, S.458)	200

5.4	Graphische Motivierung der Ableitung als Steigung der Tangente in Sydsæter u. Hammond (2015, S.196)	212
5.5	Visualisierung des Konzepts der Tangente als „Grenzgerade von Sekanten“ in Sydsæter u. Hammond (2015, S.198)	214
5.6	Visualisierung der Differentiale und der Verwendung der Ableitung zur lokalen Linearisierung in Sydsæter u. Hammond (2015, S.270)	230
5.7	Veranschaulichung und Algebraisierung der Sekantensteigung in Tietze (2010, S.200)	244
5.8	Veranschaulichung des Grenzübergangs von den Sekanten zur Grenzlage der Tangente in Tietze (2010, S.201)	244
5.9	Visualisierung der Verwendung der Ableitung zur linearen Approximation und der Differentiale in Tietze (2010, S.237)	254
5.10	Graphische Bestimmung der Grenz- und Durchschnittskosten in Wöhe u. a. (2013, S.118)	269
5.11	Beispiel einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion	273
5.12	Vierphasendiagramm der ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion aus Abbildung 5.11	274
5.13	Vierphasendiagramm zu einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion	277
5.14	Bestimmung des Grenzertrages in der Musterlösung in Wöhe u. a. (2013, S.126))	279
5.15	Verfahren zur graphischen Bestimmung der Minimalkostenkombination (r_1, r_2) bei gegebener Kostenisoquante in Wöhe u. Döring (2013, S.297)	283
5.16	Zeitlicher Verlauf des Lagerbestandes im Grundmodell zur Ermittlung der optimalen Bestellmenge	288
5.17	Veranschaulichung der Auswirkungen von Preisänderungen auf den Erlös im elastischen Bereich der Nachfrage in Wöhe u. Döring (2013, S.419)	293
5.18	Graphische Ermittlung des Gewinnmaximums und der zugehörigen Maximalstelle (<i>Cournot'sche Menge</i>) im Monopolmarkt in Wöhe u. Döring (2013, S.423)	298
5.19	Graphische Bestimmung einer Preis-Absatz-Funktion, des zugehörigen Erlöses und des Grenzerlöses bei gegebenem Prohibitivpreis und gegebener Sättigungsmenge in Wöhe u. a. (2013, S.229), PAF=„Preis-Absatz-Funktion“	300
6.1	Punkteverteilung im Teilttest zur Technik des Ableitens	321
6.2	Aufgaben des Teilttests <i>Steigungsaspekte linearer Funktionen</i>	325

6.3	Punkteverteilung im Teilttest zu Aspekten der Steigung linearer Funktionen	328
6.4	Aufgabe des Teilttests zur Deutung der Steigung im Kontext, basierend auf einer Aufgabe von Carlson u. a. (2010)	331
6.5	Aufgabe des Vortests zur Interpretation des Differenzenquotienten im Kontext	335
6.6	Aufgabe des Vortests zur Bedeutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten	335
6.7	Aufgabe des Vortests zur Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit, basierend auf Carlson u. a. (2010, S.135)	336
6.8	Punkteverteilung im Teilttest zum Differenzenquotienten	342
6.9	Antworten der Aufgabe das Ergebnis $\frac{K(100)-K(90)}{100-90} = 18100$ im Kontext zu interpretieren ($N = 143$)	344
6.10	Aufgabe des Vortests zur Bestimmung einer Durchschnittsgeschwindigkeit	346
6.11	Aufgabe 3 des Vortests	350
6.12	Aufgabe 4 des Vortests	351
6.13	Aufgabe 5 des Vortests	352
6.14	Funktionsgraph zu Aufgabe 6 des Vortests	353
6.15	Punkteverteilung im Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung	355
6.16	Aufgabe 3 des Vortests	356
6.17	Aufgabe 4 des Vortests	357
6.18	Aufgabe 5 des Vortests	359
6.19	Funktionsgraph zu Aufgabe 6 des Vortests	359
6.20	Geschwindigkeits-Zeit Diagramm aus Beichner (1994, S.761)	362
6.21	Aufgabe 3 des Vortests	362
6.22	Parallelaufgabe zum Thema „Steigung linearer Funktion“ mit und ohne Kontext (Planinic u. a., 2012, S.1399)	363
6.23	Funktionsgraph zu Aufgabe 6 des Vortests	364
6.24	Aufgabe 7 des Vortests	366
6.25	Aufgabe 8 des Vortests	367
6.26	Aufgabe 9 des Vortests	368
6.27	Aufgabe 10 des Vortests	369
6.28	Aufgabe aus Hahn u. Prediger (2008, S.176) zum Testen des Verständnisses der Ableitung als Änderungsrate im Kontext gegensinniger Kovariation	370
6.29	Aufgabe 11 des Vortests, angelehnt an die Aufgabe von Hahn u. Prediger (2008, S.176) aus Abbildung 6.28	371
6.30	Aufgabe 12 des Vortests	372

6.31	Punkteverteilung im Teilttest zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate	374
6.32	Aufgabe 7 des Vortests	376
6.33	Aufgabe 8 des Vortests	377
6.34	Aufgabe 10 „Dreiecksfläche“, übernommen aus Hoffkamp (2011, S.12) bzw. Schlöglhofer (2000, S.17)	378
6.35	Aufgabe 11 des Vortests zum Ertragsgesetz	380
6.36	Aufgabe 9 des Vortests mit Aussagen über Änderungsraten ohne Kontext	381
6.37	Aufgabe 12 des Vortests, angelehnt an ein Item aus dem PCA (Carlson u. a., 2010)	382
6.38	Teilttest zum Tangentenkonzept (Aufgabe 19)	388
6.39	Punkteverteilung im Teilttest zum Tangentenkonzept	390
6.40	Aufgabe 16 des Vortests	395
6.41	Aufgabe 17 des Vortests	396
6.42	Aufgabe 18 des Vortests	396
6.43	Aufgabe 15 des Vortests	398
6.44	Beispiellösung, in der die Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion von 100 Einheiten um eine Einheit über $K(1)$ ermittelt wurden	403
6.45	Punkteverteilung im Teilttest zur ökonomischen Deutung der Ableitung und dem zugehörigen Hintergrundwissen	409
6.46	Antworten der Studierenden der Aufgabe zur ökonomischen Interpretation der Ableitung $K'(200) = 2$ einer Kostenfunktion K ($N = 143$)	411
6.47	Antworten der Studierenden bei der Aufgabe zur Bestimmung der Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion von 100 Einheiten um eine Einheit ($N = 143$)	413
6.48	Antworten der Studierenden bei der Aufgabe zur Angabe einer Definition der Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ ($N = 143$)	415
6.49	Aufgabe 15 des Vortests zur approximativen Bestimmung von $\sin(0, 1)$ mit der Ableitung mit Begründung	416
6.50	Screepplot der Hauptachsen-Faktorenanalyse zum Vortest	428
6.51	Erster Teil der Faktormatrix der Hauptachsenanalyse des Vortests bei Extraktion von 3 Faktoren (Faktor 1)	429
6.52	Zweiter Teil der Faktormatrix der Hauptachsenanalyse des Vortests bei Extraktion von 3 Faktoren (Faktoren 2 und 3)	430
6.53	Erster Teil der Faktormatrix der Hauptachsenanalyse des Vortests bei Extraktion von 7 Faktoren (Faktoren 1-4)	431

6.54	Zweiter Teil der Faktormatrix der Hauptachsenanalyse des Vortests bei Extraktion von 7 Faktoren (Faktoren 5-7)	432
6.55	Verteilung der erreichten Gesamtpunktzahlen	435
6.56	Funktionsgraph zu Aufgabe 6 des Vortests	442
6.57	Zwei Situationen, zu denen passende Funktionsgraphen ausgewählt werden mussten (Füllgraph zur linken Flasche, Graph zur grauen Fläche innerhalb des Dreiecks)	443
7.1	Skizze zur Veranschaulichung der Approximation der Zusatzkosten durch den Zuwachs entlang der Tangente	453
7.2	Ergebnisse der Aufgabe zur Angabe einer ökonomischen Interpretation der Ableitung $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ einer Gewinnfunktion G ($N = 821$)	463
7.3	Vergleich der Antworten der Studierenden bei den Aufgaben zur ökonomischen Interpretation von $K'(200) = 2$ einer Kostenfunktion im Vortest im September 2015 und von $G'(73) = 0,2$ einer Gewinnfunktion in der Klausur im Februar 2016	467
7.4	Ergebnisse der Aufgabe zur Angabe einer mathematischen Interpretation der Ableitung $G'(73) = 0,2 \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$ einer Gewinnfunktion ($N = 821$)	472
7.5	Rechenwege der Studierenden bei der Aufgabe zur approximativen Bestimmung von $K(7) - K(5)$ einer Kostenfunktion K mit $K(5) = 10$ und $K'(5) = 0,5$ ($N = 821$)	477
7.6	Angegebene Einheit der Zusatzkosten bei der Aufgabe zur approximativen Bestimmung von $K(7) - K(5)$ einer Kostenfunktion K mit $K(5) = 10$ und $K'(5) = 0,5$ ($N = 821$)	480
7.7	Ergebnisse der Aufgabe zur Begründung, weshalb die approximative Bestimmung der Zusatzkosten $K(7) - K(5)$ durch $K'(5) \cdot (7 - 5)$ im Allgemeinen nicht exakt ist ($N = 821$)	485
8.1	Graph der Interventionsaufgabe	506
8.2	Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 1	507
8.3	Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3	509
8.4	Skizze zur Veranschaulichung der Approximation der Zusatzkosten durch den Zuwachs entlang der Tangente	510
8.5	Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3	522
8.6	Beispiel von Johannes für eine Funktion, bei der der Fehler zwischen $K'(100)$ und $K(101) - K(100)$ größer ist als bei der Kostenfunktion aus Aufgabe 3 (ebenfalls in der Graphik)	524

8.7	Approximationsformel von Johannes zur Begründung der annähernden Gleichheit von $K'(x)$ und der Kostendifferenz $K(x+1) - K(x)$	526
8.8	Graph der Interventionsaufgabe	532
8.9	Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 1	535
8.10	Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3	538
8.11	Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 1	552
8.12	Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3	557
8.13	Graph der Interventionsaufgabe	558
8.14	Detlevs Beispiel für eine Funktion mit großem Unterschied zwischen Ableitung und Zuwachs zur nächsten Einheit	559
8.15	Graph der Funktion der Interventionsaufgabe	567
8.16	Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 1	569
8.17	Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3	572
8.18	Ralfs Beispiel für eine Funktion mit großem Unterschied zwischen Ableitung und Zuwachs zur nächsten Einheit	573
8.19	Graph der Kostenfunktion K der Interventionsaufgabe	583
8.20	Steigungsdreieck von Karl zur Bestimmung von $K'(10)$	585
8.21	Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3	587
8.22	Graph der Kostenfunktion K aus der Interventionsaufgabe	596
8.23	Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3	600
8.24	Graph der Kostenfunktion der Interventionsaufgabe mit Veronikas Einzeichnungen aus der Interventionsphase	600
8.25	Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3	614
8.26	Skizze für Susanne als Hilfe für die Erkenntnis, dass bei Extremwerten die Steigung 0 ist bzw. eine waagerechte Tangente vorliegt	616
8.27	Skizze als Hilfe für Susanne mit eingezeichneten waagerechten Tangenten an den Extrempunkten	617
8.28	Ausschnitt aus dem Graphen der Kostenfunktion K aus Aufgabe 1 mit Susannes Hilfslinien nach der Intervention im Interview	620
8.29	Lisas Veranschaulichung einer marginalen Einheit	628
8.30	Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 1	629
8.31	Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3	633
8.32	Lisas Skizze zur Rekonstruktion der Definition der Ableitung mit eingezeichnetem Steigungsdreieck	636
8.33	Graph der Kostenfunktion K aus Aufgabe 3	647

8.34 Skizze aus der Mathematikvorlesung zur Veranschaulichung
der Approximation der Zusatzkosten durch den Zuwachs ent-
lang der Tangente 648

9.1 Rahmenmodell zur theoretischen Beschreibung eines möglichen
adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik
für Wirtschaftswissenschaftler 661

9.2 Verteilung der erreichten Gesamtpunktzahlen 664

Tabellenverzeichnis

1.1	Empirische Studien zur Beantwortung der Forschungsfragen F2-F4	6
1.2	Übersicht über die Kapitel der Arbeit mit empirischen Studien	8
3.1	Nutzung des Konstrukts des <i>concept image</i> zur Beantwortung der Forschungsfragen der Dissertation	35
3.2	Rahmenmodell zum Verständnis der Ableitung nach Zandieh (2000, S.106)	38
3.3	Verständnisebenen mathematischer Konzepte in der APOS-Theorie (Asiala u. a., 1996)	47
3.4	Schritte der genetischen Dekomposition zur Ableitung (Asiala u. a., 1997a, S.407)	49
4.1	Items zur Steigung von Funktionen aus Nagle u. a. (2013, S.1499)	74
4.2	Ausschnitt aus dem Kategoriensystem von Nagle u. a. (2013, S.1500) mit allen für das Verständnis notwendigen Kategorien dieses Systems	76
4.3	Von Studierenden angesprochene Aspekte der Steigung in den Antworten der Items aus Tabelle 4.1, ($N = 65$)	77
4.4	Antworten der Studierenden zum Item aus dem PCA zur Interpretation der Steigung aus der Gleichung ($N = 672$)	79
4.5	Kategorienbeschreibungen zur ersten Aufgabe aus Byerley u. a. (2016, S.599) die Steigung $\frac{8.2}{2.7} = 3.04$ zu interpretieren.	81
4.6	Ergebnis der Kategorisierung der Antworten der Lehrer zur ersten Aufgabe aus Byerley u. a. (2016, S.601) zur Interpretation der Steigung $\frac{8.2}{2.7} = 3.04$, ($N = 157$)	82
4.7	Kategorien der zweiten Aufgabe aus Byerley u. a. (2016, S.600) zur Interpretation der Steigung 3.04 bei Zuwächsen von $\Delta x \neq 1$ und Ergebnisse der Lehrer 2014 ($N = 157$)	83
4.8	Kategorien der Antworten der Aufgaben A und B aus Byerley u. a. (2016) ($N = 157$), angegeben in absoluten Zahlen	84

4.9	Perspektiven auf das Konzept der Steigung in Zaslavsky u. a. (2002, S.124) ($N = 124$)	87
4.10	Perspektiven der einzelnen Probandengruppen auf das Konzept der Steigung in Zaslavsky u. a. (2002, S.133) ($N = 124$) .	88
4.11	Ergebnisse der Schüler auf die Fragen in Malle (2003, S.57) zum Verständnis des Differenzenquotienten ($N = 220$)	90
4.12	Erklärung der falschen Ergebnisse des Vortests der Aufgabe aus dem PCA zur Bestimmung der mittleren Änderungsrate (Carlson u. a., 2010, S.136)	92
4.13	Verteilung der Antworten bei der Aufgabe zur Berechnung der mittleren Änderungsrate im PCA (Carlson u. a., 2010, S.136) ($N = 1501$)	92
4.14	Bei Studierenden vorhandene und von ihnen präferierte Modelle zum Begriff des Grenzwertes einer Funktion (Williams, 1991, S.225) ($N = 341$)	99
4.15	Bei Studierenden vorhandene und von ihnen präferierte Modelle zum Begriff des Grenzwertes einer Funktion bei denen, die das formale Modell als „richtig“ ansahen (Williams, 1991, S.225) ($N = 226$)	99
4.16	Ergebnisse des Tests zur Beantwortung der Frage, inwieweit Studierende Grenzwerte zur Approximation unbekannter Funktionswerte nutzen (Çetin, 2009a, S.327-328)	107
4.17	Ergebnisse der Aufgabe aus Bingolbali u. Monaghan (2008, S.26) zur Nutzung der Ableitung als lineare Approximation, $M =$ Mathestudierende, $ME =$ Studierende aus „Mechanical Engineering“	109
4.18	Codierung eines Beispiels zur Illustration des Grenzübergangs im Lehrbuch von Stewart (2010, S.82) in Park (2016, S.401) .	122
4.19	Zusammenfassung der Codierung des Beispiels zur Bestimmung der Ableitung von $f(x) = x^2$ bei $x = 1$ aus Tabelle 4.18 (Park, 2016, S.402)	122
4.20	Ausschnitt der Codierung der Episoden zum Grenzübergang bei der Ableitung aus dem Lehrbuch von Hugh-Hallett (2010)	123
4.21	Lösungshäufigkeiten zu den Tangentenaufgaben von Vinner (1982, S.27) ($N = 278$)	124
4.22	Tangentendefinitionen der Studierenden aus Vinner (1982, S.28) ($N = 278$)	126
4.23	Modelle des Tangentenbegriffs nach Biza (2007, S.9) und Zuordnung der Kurven aus Abbildung 4.7 zu den Modellen .	128

4.24	Anteil der Studierenden mit den zugehörigen Tangentenmodell aus Tabelle 4.23 (Biza, 2007, S.9), ($N = 182$)	129
4.25	Aufgabentypen des TUG-K Tests von Beichner (1994, S.752)	134
4.26	Antworthäufigkeiten auf die Frage nach der Beschreibung der Bewegung aus Abbildung 4.10 im TUK-G-Test (Beichner, 1994, S.753) ($N = 524$)	135
4.27	Antworthäufigkeiten im PCA zur Aufgabe aus Abbildung 4.11 ($N = 672$)	136
4.28	Ergebnisse der Aufgabe „two speed graphs“ aus Monk (1994, S.23) (siehe Abbildung 4.13), N nicht angegeben	142
4.29	Ergebnisse der Aufgabe zu den Sekantensteigungen aus Monk (1994, S.23) ($N = 166$)	142
4.30	Ergebnisse der Füllgraphenaufgabe aus Abbildung 4.18 (Çetin, 2009b, S.239-240) ($N = 104$)	150
4.31	Ergebnisse der Geschwindigkeitsaufgabe aus Çetin (2009b, S.237-239) mit den Ableitungsgraphen aus Abbildung 4.19 ($N = 104$)	151
4.32	Ergebnisse der Flaschenaufgabe aus Abbildung 4.21 bei 20 Studierenden mit Note A im Kurs Calculus I ($N = 20$)	153
4.33	Konkretisierung von Aktivitäten zu den einzelnen Aktivitäten des Rahmenmodells von Carlson u. a. (2002, S.357)	155
4.34	Ergebnisse der vier Studierenden bei der Vorhersage von Graphen von Bestand bzw. Änderungen im Bewegungskontext und im Geldkontext (Wilhelm u. Confrey, 2003, S.896)	158
5.1	Übersicht über die Unterkapitel zur Ableitung in Dietz (2012) im Kapitel über differenzierbare Funktionen	177
5.2	Im Dietz (2012, S.270) präsentierte Grundableitungen	188
5.3	Ökonomische Bezeichnungen für verschiedene Werte der Elastizitäten	194
5.4	In Dietz (2012) präsentierte Formeln der Elastizitäten gewisser elementarer Funktionen (S.304)	195
5.5	Rechenregeln für Elastizitäten in Dietz (2012, S.305)	195
5.6	In Dietz (2012) behandelte Aspekte des Ableitungskonzepts als rein mathematisches Konzept	202
5.7	Begründungsformen in Dietz (2012) in Zusammenhang mit der Ableitung	205
5.8	Übersicht über die Unterkapitel zur Ableitung in Sydsæter u. Hammond (2015)	210

5.9	Übersicht über die in Sydsæter u. Hammond (2015, S.218-219) behandelten „einfachen Regeln der Differentiation“	223
5.10	Übersicht über die in Sydsæter u. Hammond (2015, S.218-219) präsentierten Begründungen der „einfachen Ableitungsregeln“	223
5.11	In Sydsæter u. Hammond (2015) behandelte Aspekte des Ableitungskonzepts als rein mathematisches Konzept	236
5.12	Begründungsformen in Sydsæter u. Hammond (2015) in Zusammenhang mit der Ableitung	239
5.13	Aufgabentypen in Sydsæter u. Hammond (2015) in Zusammenhang mit der Ableitung	240
5.14	Übersicht über die Unterkapitel zur Ableitung im Lehrbuch von Tietze (2010)	242
5.15	In Tietze (2010) behandelte Aspekte des Ableitungskonzepts als rein mathematisches Konzept	260
5.16	Begründungsformen in Tietze (2010) im Zusammenhang mit der Ableitung	263
5.17	Fiktives Beispiel aus Wöhe u. Döring (2013, S.285) mit verschiedenen Faktoreinsatzkombinationen aus den Faktoren r_1 und r_2 zur Herstellung einer Ausbringungsmenge von 5 Einheiten	281
5.18	Auswirkungen von Preisänderungen auf den Umsatz in Abhängigkeit der Bereiche der Nachfrageelastizität (Wöhe u. a., 2013, S.227)	292
5.19	Zusammenfassung der Inhalte in Wöhe u. Döring (2013), bei denen die Ableitung eine Rolle spielt und des für deren Verständnis nötigen Hintergrundwissens zur Ableitung	304
5.20	Zusammenfassung der notwendigen Wissensaspekte zur Ableitung zum Verständnis der Ausführungen im Lehrbuch von Wöhe u. Döring (2013)	305
5.21	Vermittelte und benötigte Aspekte zum Ableitungsbegriff in den analysierten Lehrbüchern (einschließlich der darauf aufbauenden Konzepte <i>Elastizität</i> und <i>Differential</i>), D=(Dietz, 2012), H=(Sydsæter u. Hammond, 2015), T=(Tietze, 2010), W=(Wöhe u. Döring, 2013), V=(Varian, 2011)	307
6.1	Übersicht über die Teiltests des Vortests	316
6.2	Trennschärfen des Teiltests zur Technik des Ableitens	320
6.3	Kenngrößen der Punktesumme beim Teiltest zur Technik des Ableitens	320

6.4 Anteile richtiger Antworten bei den einzelnen Aufgaben des Teiltests zur Technik des Ableitens 322

6.5 Steigungsaspekte linearer Funktionen nach Nagle u. a. (2013) 324

6.6 Zuordnung der einzelnen Aufgaben zu den Aspekten der Steigung einer linearen Funktion nach Nagle u. a. (2013) 326

6.7 Bewertungsschema des Teiltests zu Aspekten der Steigung linearer Funktionen 327

6.8 Trennschärfen des Teiltests zu Aspekten der Steigung linearer Funktionen 327

6.9 Kenngrößen der Punktesumme beim Teiltest zu Aspekten der Steigung linearer Funktionen 329

6.10 Lösungshäufigkeiten bei den einzelnen Items des Teiltests zu Aspekten der Steigung linearer Funktionen nach Nagle u. a. (2013) 330

6.11 Ausgewählte Antworten bei der Aufgabe zur Deutung der Steigung im Kontext, Aufgabe siehe Abbildung 6.4 331

6.12 Items in dem von Nagle at al. durchgeführten Test zu Aspekten der Steigung linearer Funktionen (Nagle u. a., 2013, S.1499) . 332

6.13 Beschreibung der Kategorien zu den im Vortest betrachteten Aspekten der Steigung nach Nagle u. a. (2013) 332

6.14 Anteile der Studierenden im Vortest und bei Nagle u. a. (2013), die die Kenntnis eines Aspekts der Steigung einer linearen Funktion zeigten 333

6.15 Erklärung der falschen Ergebnisse der Aufgabe aus Abbildung 6.7, ermittelt in Interviews von Carlson u. a. (2010, S.136) 336

6.16 System zur Kategorisierung der Antworten bei der Aufgabe den Differenzenquotienten $\frac{K(100)-K(90)}{100-90}$ im Kontext „Kosten für die Produktion von Autos“ zu deuten 337

6.17 Beschreibung der Kategorien der Antworten zur Deutung des Differenzenquotienten $\frac{K(100)-K(90)}{100-90}$ im Kontext „Kosten für die Produktion von Autos“ 339

6.18 Trennschärfen des Teiltests zum Differenzenquotienten 340

6.19 Trennschärfen des Teiltests zum Differenzenquotienten ohne die Aussagen 3 und 4 zum Vorzeichen des Differenzenquotienten aus Tabelle 6.18 341

6.20 Kenngrößen der Punktesumme beim Teiltest zum Differenzenquotienten 343

6.21	Lösungshäufigkeiten der Aufgabe zur Bewertung von Aussagen über die Bedeutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten	345
6.22	Gewählte Antworten bei den Aussagen über die Bedeutung des Vorzeichens des Differenzenquotienten	345
6.23	Verteilung der Antworten bei der Aufgabe aus Abbildung 6.10 zur Bestimmung einer Durchschnittsgeschwindigkeit	347
6.24	Vergleich der Antworten bei der Aufgabe zur Berechnung einer Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften an der Uni Paderborn und Teilnehmern des PCA an der Arizona State University	349
6.25	Trennschärfen der Items aus dem Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung	354
6.26	Kenngrößen der Punktesumme beim Teilttest zur geometrischen Deutung der Ableitung	356
6.27	Lösungshäufigkeiten bei der Wahl der Graphen mit $f'(1) > 0$ aus Aufgabe 3 des Vortests	357
6.28	Lösungshäufigkeiten bei Aufgabe 4 des Vortests aus Abbildung 6.17	358
6.29	Auswahl der Antwortoptionen bei Aufgabe 4 des Vortests aus Abbildung 6.17 ($N = 143$)	358
6.30	Von den Studierenden ausgewählte Antworten bei Aufgabe 5 des Vortests	359
6.31	Lösungshäufigkeiten bei den Aussagen in Aufgabe 6 über Werte der Nullstellen und Extrema der Ableitungen zum Funktionsgraphen aus Abbildung 6.19	360
6.32	Auswahl der Antwortoptionen der Gesamtstichprobe bei Aufgabe 6 des Vortests ($N = 143$)	360
6.33	Trennschärfen der Items aus dem Teilttest zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate	373
6.34	Kenngrößen der Punktesumme beim Teilttest zur Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate	375
6.35	Lösungshäufigkeiten bei Aufgabe 7 aus Abbildung 6.32 zum Finden des Gefäßes bei gegebenem Füllgraphen	376
6.36	Antworten der Studierenden bei Aufgabe 7 aus Abbildung 6.32 zum Finden des passenden Gefäßes bei gegebenem Füllgraphen ($N = 143$)	376
6.37	Lösungshäufigkeiten bei Aufgabe 8 aus Abbildung 6.33 zum Finden des Füllgraphen zu einer Flasche	378

6.38	Antworten der Studierenden bei Aufgabe 8 aus Abbildung 6.33 zum Finden des Füllgraphen zu einer Flasche ($N = 143$)	378
6.39	Lösungshäufigkeiten der Aufgabe 10 „Dreiecksfläche“ aus Abbildung 6.34	379
6.40	Lösungshäufigkeiten bei Aufgabe 10 aus Abbildung 6.34 bei Fokussierung auf den groben qualitativen Verlauf	379
6.41	Antworten der Studierenden bei Aufgabe 10 „Dreiecksfläche“ aus Abbildung 6.34 ($N = 143$)	379
6.42	Antworten der Studierenden bei Aufgabe 11 aus Abbildung 6.35 zum Ertragsgesetz	380
6.43	Lösungshäufigkeiten bei Aufgabe 9 aus Abbildung 6.36 zu Aussagen über Änderungsraten einer Funktion ohne Kontext	381
6.44	Lösungshäufigkeit bei Aufgabe 12 aus Abbildung 6.37 zur qualitativen Beschreibung des Wachstums einer Funktion . .	382
6.45	Antworten der Studierenden bei Aufgabe 12 aus Abbildung 6.37 zur qualitativen Beschreibung des Wachstums einer Funktion ($N = 143$)	382
6.46	Vergleich der Studienanfänger der Uni Paderborn mit den Probanden des PCA bei der Aufgabe zum Finden des Gefäßes zum Füllgraphen (Aufgabe siehe Abbildung 6.32)	384
6.47	Vergleich der Studierenden bei Aufgabe 11 zum Ertragsgesetz mit Studierenden des Lehramtes für Grund-, Haupt- und Realschulen aus Hahn u. Prediger (2008, S.176) (Aufgabe siehe Abbildung 6.35)	385
6.48	Antworten der Studierenden bei Aufgabe 12 zur qualitativen Beschreibung des Wachstums einer Funktion im Vergleich zu den Teilnehmern des PCA an der Arizona State University (Aufgabe siehe Abbildung 6.37)	386
6.49	Trennschärfen des Teiltests zum Tangentenkonzept	389
6.50	Kenngrößen der Punktesumme beim Teiltest zum Tangentenkonzept	391
6.51	Lösungshäufigkeiten bei den Aufgaben zu entscheiden, ob die dargestellten Geraden Tangenten an den Punkt A sind	392
6.52	Vergleich der Antworten Studienanfänger der Wirtschaftswissenschaften der Universität Paderborn mit den Probanden bei Biza (2007) bei den Items dieses Teiltests	394
6.53	Kategoriensystem der Aufgabe zur Interpretation des Werts $K'(200) = 2$ im Kontext „Kosten für die Produktion von Kugelschreibern“	400

6.54	Beschreibung der Kategorien der Aufgabe zur Interpretation von $K'(200) = 2$ im Kontext „Kosten für die Produktion von Kugelschreibern“	401
6.55	Kategoriensystem der Aufgabe zur Bestimmung der Mehrkosten bei Erhöhung der Produktion von 100 Einheiten um eine Einheit	402
6.56	Kategoriensystem der Aufgabe zur Angabe einer Definition der Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle x . . .	403
6.57	Beschreibung der Kategorien der Aufgabe zur Angabe einer Definition der Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$	404
6.58	Kategoriensystem der Aufgabe zur näherungsweisen Bestimmung von $\sin(0, 1)$ (gegeben: $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = 1$) . .	405
6.59	Beschreibung der Kategorien der Aufgabe zur näherungsweisen Bestimmung von $\sin(0, 1)$ mit Begründung (gegebene Werte: $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = 1$)	406
6.60	Koeffizienten Cohens κ der offenen Aufgaben des Teiltests zur ökonomischen Deutung der Ableitung und dem für deren Verständnis nötigen Hintergrundwissen	407
6.61	Punkteschema des Teiltests zur ökonomischen Deutung der Ableitung und dem für deren Verständnis nötigen Hintergrundwissen	408
6.62	Kenngrößen der Punktesumme beim Teiltest zur ökonomischen Interpretation der Ableitung und dem zugehörigen Hintergrundwissen	410
6.63	Antworten der Studierenden bei der Aufgabe, einen symbolischen Ausdruck für die Nachfrageänderung bei Erhöhung des Preises von einem Preis p_0 um einen Euro anzugeben (Aufgabe siehe Abbildung 6.42)	414
6.64	Antworten der Studierenden bei der Aufgabe zur approximativen Bestimmung von $\sin(0, 1)$ mit der Ableitung mit Begründung (gegebene Werte $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = 1$) . .	417
6.65	Übersicht über die Teiltests des Vortests	420
6.66	Trennschärfen des Vortests nach Herausnahme der Aussagen 2 und 3 zum Vorzeichen des Differenzenquotienten (siehe Beginn dieses Abschnitts)	423
6.67	Korrelationen der einzelnen Teiltests zum Verständnis der Ableitung	425
6.68	Kenngrößen der Punktesumme des Gesamttests	434

6.69 Kenngrößen der normierten Punkteverteilungen der einzelnen Teiltests (problematische Items wurden bereits entfernt) 436

6.70 Kenngrößen der normierten Punkteverteilungen der einzelnen Teiltests (problematische Items wurden bereits entfernt) 439

7.1 Kategoriensystem der Aufgabe zur ökonomischen Interpretation von $G'(73) = 0,2 \left[\frac{GE}{ME} \right]$ einer Gewinnfunktion 460

7.2 Erweiterung des Kategoriensystems aus Tabelle 7.1 um drei Kategorien, die in der Abschlussklausur in mehr als 3% der Fälle auftraten 461

7.3 Feinkategorisierung der Antworten der Probanden mit der Interpretation von $G'(73) = 0,2 \left[\frac{GE}{ME} \right]$ als Zusatzgewinn in Abhängigkeit davon, ob von *ungefährtem Zusatzgewinn* oder von *marginalen* Einheiten gesprochen wurde 465

7.4 Adäquatheit der Formulierungen der Studierenden mit ökonomischer Interpretation der Ableitung $G'(73) = 0,2 \left[\frac{GE}{ME} \right]$ als Zusatzgewinn (Kategorie Ö1 aus Abbildung 7.2) 466

7.5 Kategoriensystem der Aufgabe zur mathematischen Interpretation von $G'(73) = 0,2$ 469

7.6 Beschreibung der Kategorien M4-M12 der Aufgabe zur mathematischen Interpretation von $G'(73) = 0,2$ 471

7.7 Kategorien der Aufgabe zur näherungsweise Bestimmung der Zusatzkosten $K(7) - K(5)$ bei gegebener Kostenfunktion K mit $K(5) = 10$ und $K'(5) = 0,5$ 475

7.8 Beschreibung der Kategorien bei der Aufgabe zur approximativen Bestimmung der Zusatzkosten $K(7) - K(5)$ bei gegebenen $K(5) = 10$ und $K'(5) = 0,5$ 476

7.9 Kategoriensystem der Aufgabe zur Begründung, weshalb die Bestimmung der Zusatzkosten $K(7) - K(5)$ durch $K'(5)(7 - 5)$ im Allgemeinen nicht exakt ist 481

7.10 Beschreibung der Kategorien bei der Aufgabe zur Begründung, weshalb die Bestimmung der Zusatzkosten $K(7) - K(5)$ durch $K'(5)(7 - 5)$ im Allgemeinen nicht exakt ist 483

7.11 Bewertungsschema für eine aufgabenübergreifende Analyse . 487

7.12 Punkte der Studierenden bei der aufgabenübergreifenden Analyse bei Bewertung jeder Aufgabe mit maximal einem Punkt . 489

8.1 Leitfragen zur Auswertung der Interviews 514

- 9.1 Vermittelte und benötigte Aspekte zum Ableitungsbegriff in den analysierten Lehrbüchern (einschließlich der darauf aufbauenden Konzepte *Elastizität* und *Differential*), D=(Dietz, 2012), H=(Sydsæter u. Hammond, 2015), T=(Tietze, 2010), W=(Wöhe u. Döring, 2013), V=(Varian, 2011) 663
- 9.2 Kenngrößen der Punktesumme des Gesamttests 664
- 9.3 Kenngrößen der normierten Punkteverteilungen der einzelnen Teiltests 665
- 9.4 Ergebnisse ausgewählter Items des Teiltests zum Differenzenquotienten und des Teiltests zur ökonomischen Deutung der Ableitung und dem für deren Verständnis notwendigen Hintergrundwissen 667

Zusammenfassung

Das Konzept der Ableitung spielt in der Ökonomie eine große Rolle, zum Beispiel bei der Analyse von Auswirkungen kleiner Änderungen ökonomischer Größen wie Preisen auf andere Größen wie die Nachfrage, bei der Lösung von Optimierungsproblemen wie der Gewinnmaximierung oder beim Aufbau ökonomischer Theorien wie der Kostentheorie. Daher sollten Studierende der Wirtschaftswissenschaften ein umfassendes, mathematisch adäquates Verständnis der Ableitung erwerben, das aber gleichzeitig die Praxis des Umgangs mit ihr in der Ökonomie mitberücksichtigt, damit die Studierenden die Ableitung dort später *verständlich* verwenden können.

In der hier vorliegenden Dissertation wird dargestellt, (i) wie ein solches (adäquates) Verständnis der Ableitung aussehen kann, (ii) inwiefern es praktisch in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vermittelt wird, und (iii) inwieweit Studierende der Wirtschaftswissenschaften zu Beginn ihres Studiums und nach Besuch einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ über ein solches verfügen.

Hierfür wird zunächst auf Grundlage von mathematikdidaktischer Literatur zur Beschreibung von „Verständnis der Ableitung“ und Analysen ökonomischer Lehrbücher zum Umgang mit der Ableitung bei deren Deutung in ökonomischen Kontexten ein Rahmenmodell zur theoretischen Beschreibung eines möglichen adäquaten Verständnisses der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler entwickelt. Dieses basiert auf dem Konstrukt des *concept image* von Tall und Vinner (1981), welches aus allen Assoziationen zu einem mathematischen Konzept besteht.

Mit Hilfe von Lehrbuchanalysen wird dann das gegenwärtig in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler praktisch vermittelte und das in der Ökonomie praktisch vorausgesetzte *concept image* zur Ableitung untersucht. Das bei Studienanfängern der Wirtschaftswissenschaften vorhandene *concept image* zur Ableitung wird mit Hilfe eines Vortests ermittelt, der speziell für diese Gruppe konzipiert, und an der Universität Paderborn eingesetzt wurde. Die Untersuchung des bei Studierenden nach Besuch einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ vorhandene *concept image* zur Ableitung erfolgt ebenfalls *exemplarisch* an der Universität Paderborn mit

Hilfe von speziell dafür konzipierten Klausuraufgaben und einer zusätzlichen Interviewstudie zur Ermittlung möglicher Verständnisschwierigkeiten.

Die im Rahmen der Dissertation durchgeführten Studien zeigen schließlich, (1) dass Studierende der Wirtschaftswissenschaften ein umfassendes *concept image* zur Ableitung benötigen, und (2) dass ein solches in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler auch vermittelt wird. (3) Die hier untersuchten Studienanfänger verfügten zu Beginn ihres Studiums noch nicht über ein solches *concept image* und sie hatten viele Probleme beim Verständnis der Ableitung, die hier genau herausgearbeitet werden. (4) Sie hatten aber auch größtenteils nach Besuch ihrer Lehrveranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ *kein adäquates concept image* zur Ableitung für deren *verständige* Anwendung in der Ökonomie, obwohl ein solches in dem Kurs vermittelt wurde. Auch hier erfolgt eine Herausarbeitung von Verständnisschwierigkeiten sowie von deren möglichen Ursachen.

Auf Basis der ermittelten Schwierigkeiten der Studierenden beim Verständnis der Ableitung zu Beginn des Studiums und nach Besuch ihrer mathematischen Lehrveranstaltung werden schließlich zahlreiche Konsequenzen für die Behandlung der Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vorgeschlagen.

Abstract

The concept of derivative plays a major role in economics. It is, for example, important for the analysis of the impact of small changes of economic quantities like prices on another quantity like the demand, for the solution of optimization problems like profit maximization, or for the construction of economic theories like cost theory. Hence, students of economics should have an understanding of the derivative, which is adequate from a mathematical point of view on the one hand, but also includes the way the derivative is used in economic contexts, so the students are later able to use it in economics in a reflective manner.

In this PhD-thesis it is investigated in which way an adequate understanding of the derivative in the above mentioned sense can be theoretically described, to what extent it is currently practically taught in mathematics courses for students of economics, and to what extent students of economics have an adequate understanding of the derivative before and after their mathematics course at university.

First, a theoretical model to describe a possible adequate understanding of the derivative that also includes the way the derivative is used in economic contexts is developed. This model is based on (didactic) literature about students' understanding of the derivative as a mathematical concept and on an analysis of economic textbooks focusing on the way the derivative is used in economic contexts. The theoretical basis of this model is the construct of *concept image* by Tall and Vinner (1981): the total cognitive structure that is associated with a concept.

Afterwards, the state of the art concerning the *concept image* of the derivative needed by, taught to and acquired by students of economics before and after their mathematics course is investigated. The *concept image* taught is examined by analyzing mathematics textbooks for economics students, the one practically needed in economics is explored by analyzing economic textbooks. To find out about economics students' *concept image* of the derivative when entering university, a pretest for this particular group was constructed and administered to university freshmen at the University of Paderborn. The *concept image* of economics students after their mathematics course was also investigated with these students by analyzing

their answers to questions about the understanding of the derivative in their final exam. Furthermore, an interview study was conducted to find out particular difficulties students might have when trying to make sense of the way the derivative is used in economic contexts.

These studies show that (1) economics students need a broad *concept image* of the derivative to understand economic textbooks, and (2) that a broad *concept image* of the derivative is also taught in mathematical textbooks for students of economics. (3) The university freshmen investigated here did not yet have an adequate *concept image* of the derivative. They had many difficulties in understanding the derivative that are presented in this PhD-Thesis in detail. (4) However, the students also did not have an adequate *concept image* of the derivative after their mathematics course although such was taught there. Again, the difficulties the students had will be presented here in detail.

Finally, on the basis of the students' difficulties concerning the understanding of the derivative found out in the studies, several possible consequences for the teaching of the derivative concept in mathematics for students of economics are suggested.